55. ročník Fyzikálnej olympiády
v školskom roku 2013/2014

Riešenie úloh krajského kola kategórie D
(ďalšie informácie na http://fo.uniza.sk a www.olympiady.sk)

1. Trolejbus

a) Náčrtok — 2b

b) Pre rovnomerne zrýchlený pohyb platí

$v = a_1\, t,$

odkiaľ určíme čas rozbiehania trolejbusu

$t_1 = \dfrac{v_1}{a_1}$. Pre dané hodnoty $t_1 \approx 17$ s. — 1b

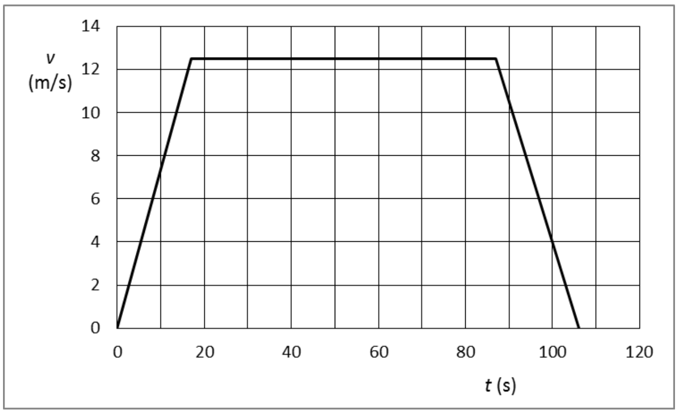
Pre rovnomerne spomalený pohyb platia vzťahy

$$s = v_1 t + \frac{1}{2} a_3 t^2 \qquad v = v_1 + a_3 t\,,$$

kde $a_3 < 0$ je veľkosť zrýchlenia trolejbusu.
Pre čas brzdenia trolejbusu ($v = 0$) máme

$t_3 = \dfrac{2 d_3}{v_1}$. Pre dané hodnoty $t_3 \approx 19$ s. — 1b

c) Graf funkcie $v = f(t)$ rýchlosti trolejbusu — 2b



d) Dráha rovnomerne zrýchleného pohybu pri rozbehu trolejbusu

$$d_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{v_1^2}{2 a_1}.$$

Celková dráha medzi zastávkami

$$d = d_1 + d_2 + d_3 = \frac{v_1^2}{2 a_1} + v_1 t_2 + d_3 .$$

Pre dané hodnoty veličín $d \approx 104$ m + 875 m + 120 m $\approx 1{,}1$ km. — 2b

e) Priemerná rýchlosť pohybu medzi zastávkami

$$v_\mathrm{s} = \frac{d}{t_\mathrm{celk}} = \frac{\frac{v_1^2}{2a_1} + v_1 t_2 + d_3}{\frac{v_1}{a_1} + t_2 + \frac{2d_3}{v_1}} = \frac{v_1}{2}\,\frac{v_1^2 + 2a_1 d_3 + 2a_1 v_1 t_2}{v_1^2 + 2a_1 d_3 + v_1 a_1 t_2}\,.$$

Priemernú rýchlosť možno určiť aj pomocou výsledkov predchádzajúcich častí

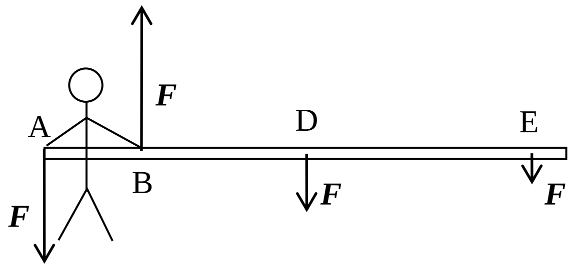
$$v_\mathrm{s} = \frac{d_1 + d_2 + d_3}{t_1 + t_2 + t_3}\,.$$

Pre dané hodnoty veličín $v_\mathrm{s} \approx 10$ m/s ≈ 37 km/h. 2b

2. *Pekár*

a) Obrázok RD2–1. 2b

V ťažisku D pôsobí nadol tiažová sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{D}$ lopáru, v bode E nadol tiažová sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{E}$ bochníka. V bode B pôsobí nahor sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{B}$ ľavého ramena ruky pekára a v bode A pôsobí sila pravého ramena ruky pekára $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$ smerom nadol. Bod A považujeme za možný bod otáčania sústavy.



Obr. RD2–1

V pokoji musí byť súčet všetkých síl pôsobiacich na lopár (vo všetkých smeroch), ako aj súčet momentov síl vzhľadom na bod A nulový. 2b

b) Z podmienky nulového súčtu momentov síl vzhľadom na bod A máme

$$F_\mathrm{B}\, d_3 - F_\mathrm{D} d_1 - F_\mathrm{E}\left(d_0 - d_2\right) = 0$$

a odtiaľ

$$F_\mathrm{B} = \frac{m_0\, d_1 + m_1\left(d_0 - d_2\right)}{d_3}\, g\,.$$ Pre dané hodnoty veličín $F_\mathrm{B} \approx 60$ N. 1b

Z podmienky nulového súčtu momentov síl v zvislom smere máme

$$F_\mathrm{A} + F_\mathrm{D} + F_\mathrm{E} - F_B = 0$$

a odtiaľ

$$F_\mathrm{A} = F_B - F_\mathrm{D} - F_\mathrm{E}\,.$$ Pre dané hodnoty veličín $F_\mathrm{A} \approx 38$ N. 1b

c) Ak sa na koniec A lopaty nasadí závažie, podmienka nulového momentu vzhľadom na bod A sa nezmení, a preto dostávame rovnakú veľkosť a rovnaký smer sily $\boldsymbol{F}'_\mathrm{B} = \boldsymbol{F}_\mathrm{B}$.

2b

Z podmienky nulovej výslednice síl vo zvislom smere tiež platí, že v bode A bude pôsobiť nadol presne rovnaká výsledná sila $\boldsymbol{F}_\mathrm{A}$ ako sme ju určili v časti b). Tá je v tomto prípade výslednicou tiažovej sily $\boldsymbol{F}_\mathrm{Z}$ závažia a sily $\boldsymbol{F}'_\mathrm{A}$ ramena ruky pekára

$$\boldsymbol{F}'_\mathrm{A} + \boldsymbol{F}_\mathrm{Z} = \boldsymbol{F}_\mathrm{A}\,.$$

Veľkosť sily

$$F'_\mathrm{A} = \left|F_\mathrm{A} - m_2 g\right|.$$ Pre dané hodnoty veličín $F'_\mathrm{A} \approx 18$ N. 2b

Keďže $F_\mathrm{A} > m_2\, g$, pôsobí pekár silou $\boldsymbol{F}'_\mathrm{A}$ ($F'_\mathrm{A} < F_\mathrm{A}$) na koniec lopaty smerom nadol.

d) Z výsledkov je zrejmé, že namáhanie ľavej ruky sa prítomnosťou závažia nezmení, ale pravej ruke závažia odľahčí. Výsledná sila, ktorou musí pekár pôsobiť je v prípade b) $F_{\text{celk}} = F_B - F_A = (m_0 + m_1)\, g$ a v prípade c) $F_{\text{celk}} = F'_B - F'_A = (m_0 + m_1 + m_2)\, g$.

Zmenšením sily F_A na F'_A sa zmenší moment sily pôsobiaci na chrbticu pekára.

Keďže ohybové namáhanie sa znáša zvyčajne horšie ako výsledná váha, zdá sa, že druhý spôsob by mohol pekárovi námahu znížiť – aj keď musí dvíhať väčšiu záťaž, ohybové namáhanie chrbtice sa zníži. 2b

Pozn.: Každé rozumné zdôvodnenie možno považovať za správne. Niekto môže považovať za zvýšenú námahu dvíhanie ťažšieho bremena.

3. Zrážka guľôčok

a) Zo zákona zachovania mechanickej energie

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = m_1\, g\, d\, (1 - \cos\alpha)$$

vyjadríme hľadanú funkciu

$$v_{10} = \sqrt{2\, g\, d\, (1 - \cos\alpha)}. \qquad (1) \qquad 1\text{b}$$

b) Niť je najviac namáhaná v najnižšej polohe guľôčky A, v ktorej majú rovnaký smer tiažová sila zavesenej guľôčky a odstredivá sila pri jej pohybe po kružnici s polomerom d:

$$F_{1\max} = m_1\, g + m_1 \frac{v_{10}^2}{d} = m_1\, g \left[3 - 2\cos\alpha\right]. \qquad 1\text{b}$$

Niť sa nepretrhne, ak $F_{1\max} < F_p$ a teda

$$\cos\alpha > \frac{1}{2}\left(3 - \frac{F_p}{m_1\, g}\right) = \cos\alpha_1. \qquad 1\text{b}$$

Pre dané hodnoty je $\cos\alpha_1 \approx -0{,}54 < 0$ a teda pre uhly $0 < \alpha < 90°$ k pretrhnutiu nite nedôjde. Riešením úlohy je maximálna hodnota uhlu vychýlenia $\alpha_1 = 90°$. 1b

c) Pri dokonale pružnej zrážke sa zachováva mechanická energia sústavy

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \text{ resp. } m_2 v_2^2 = m_1 \left(v_{10}^2 - v_1^2\right) = m_1 (v_{10} - v_1)(v_{10} + v_1). \qquad 1\text{b}$$

(Pozn.: potenciálna energia guľôčok pred zrážkou a po zrážke je rovnaká.)

Pri zrážke sa zachováva hybnosť sústavy

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 + m_2 v_2, \text{ resp. } m_2 v_2 = m_1 (v_{10} - v_1). \qquad 1\text{b}$$

Riešením tejto sústavy rovníc a s použitím výsledku (1) dostávame

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10},$$

a teda

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2\, g\, d\, (1 - \cos\alpha)} \qquad 1\text{b}$$

$$v_2 = \frac{2 m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2\, g\, d\, (1 - \cos\alpha)}. \qquad 1\text{b}$$

d) Pri udelení rýchlosti v_2 sa guľôčka B začne pohybovať po kružnici s polomerom d a podobne ako v časti b) úlohy je sila napínajúca niť, na ktorej je zavesená guľôčka B, napínaná najväčšou silou práve v tomto okamihu

$$F_{2\max} = m_2\, g + m_2\, \frac{v_2^2}{d} = m_2\, g \left[1 + \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 2\,(1 - \cos\alpha) \right].$$

Niť sa nepretrhne, ak $F_{2\max} < F_\mathrm{p}$, a teda hraničný uhol je daný podmienkou

$$\cos\alpha_2 \quad 1 - \frac{1}{8}\left(\frac{F_\mathrm{p}}{m_2\, g} - 1 \right) \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)^2 .$$

Pre dané hodnoty $\cos\alpha_2 \approx 0{,}28$, resp. $\alpha_2 \approx 74°$.

Niť sa nepretrhne, ak $\alpha < 74°$. 2b

4. *Ponáranie nádobky*

a) Keďže hustota skla je väčšia ako hustota vody, nádobka by klesla na dno. Na hladine ju treba pridržiavať silou $\boldsymbol{F}_1$ pôsobiacou nahor, ktorej veľkosť je rovná rozdielu tiažovej a vztlakovej sily

$$F_1 = F_{\mathrm{g}1} - F_{\mathrm{v}1} = m\, g - V_\mathrm{s}\, \rho_\mathrm{v}\, g = m \left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{s}} \right) g ,$$

V_s je objem skla nádoby.

Pre dané hodnoty veličín $F_1 \approx 0{,}589$ N. 2b

b) Tiažová sila pôsobiaca na nádobku naplnenú vzduchom

$$F_{\mathrm{g}2} = (m + \rho_0 V_0)\, g , \qquad (1)$$

Ak označíme $y = x\, H$ dĺžku vynorenej časti nádoby, vztlaková sila

$$F_{\mathrm{v}2} = \frac{\pi d^2}{4}\, (H - y)\, \rho_\mathrm{v}\, g = \frac{\pi d^2 H}{4}\, (1 - x)\, \rho_\mathrm{v}\, g . \qquad (2)$$ 1b

Ak nádobka pláva, sú obidve sily (1) a (2) rovnaké

$$(m + \rho_0 V_0) = \frac{\pi d^2 H}{4}\, (1 - x)\, \rho_\mathrm{v} ,$$

odkiaľ máme

$$x = 1 - \frac{4}{\pi d^2 H}\, \frac{m + \rho_0 V_0}{\rho_\mathrm{v}} .$$

Pre dané hodnoty veličín $x \approx 0{,}330 = 33{,}0\%$. 2b

c) Ak je ponorená celá nádoba, vztlaková sila

$$F_{\mathrm{v}3} = \frac{\pi d^2}{4}\, H\, \rho_\mathrm{v}\, g = \frac{\pi d^2 H}{4}\, \rho_\mathrm{v}\, g . \qquad (3)$$

Na zatlačenie dna na úroveň hladiny treba silu $\boldsymbol{F}_2$, ktorá má smer nadol a veľkosť danú rozdielom (3) a (1)

$$F_2 = F_{v3} - F_{g2} = \left(\frac{\pi d^2 H}{4} \rho_v - m - \rho_0 V_0 \right) g$$. Pre dané hodnoty $F_2 \approx 0{,}485$ N. 2b

d) Pri ponáraní sa zvyšuje tlak vody, ktorý pôsobí na vzduch v nádobe. V hĺbke h je tlak $p = p_0 + h\,\rho_v\,g$ a objem vzduchu sa tak zmenší na hodnotu

$$V = V_0 \frac{p_0}{p_0 + h \rho_v g} \ ,$$

pričom hmotnosť vzduchu sa nezmení. Tiažová sila $F_{g4} = F_{g2}$. Vztlaková sila

$$F_{v4} = F_{v3} - (V_0 - V)\,\rho_v\,g = \left(\frac{\pi d^2 H}{4} - \frac{h \rho_v g}{p_0 + h \rho_v g} V_0 \right) \rho_v\,g\,.$$ 1b

Najmenšia hĺbka, z ktorej sa nádobka nevynorí, zodpovedá rovnosti tiažovej a vztlakovej sily $F_{g4} = F_{v4}$, z ktorej dostaneme minimálnu hĺbku

$$h = \frac{p_0}{\rho_v g} \; \frac{\rho_v \dfrac{\pi d^2 H}{4} - m - \rho_0 V_0}{\rho_v V_0 - \left(\rho_v \dfrac{\pi d^2 H}{4} - m - \rho_0 V_0 \right)} \ .$$

Pre dané hodnoty $h \approx 8{,}33$ m. 2b

V tejto výške sa bude nádobka vznášať. V hĺbke väčšej ako h bude nádobka po uvoľnení klesať ku dnu.

55. ročník Fyzikálnej olympiády – *Úlohy krajského kola kategórie D*

Autori úloh: Ľubomír Konrád (1, 2, 3), Juraj Slabeycius (4)
Recenzia a úprava: Daniel Kluvanec, Ľubomír Mucha
Redakcia: Ľubomír Konrád, Ivo Čáp
Slovenská komisia fyzikálnej olympiády
Vydal: IUVENTA – Slovenský inštitút mládeže, Bratislava 2014